LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 4

Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

Lekcije iz Matematike 1.

4. Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuju svojstva zbrajanja i množenja matrica, uvodi se pojam inverzne matrice i daju uvjeti za postojanje inverza, te se uvodi pojam determinante matrice i njena veza s inverznom matricom.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako zamislimo dvije matrice kao linearne operatore, tj. kao preslikavanja s prostora u prostor, onda se prirodno nameću sljedeća pitanja: što je sa zbrojem tih dvaju preslikavanja, a što s kompozicijom (tj. s preslikavanjem koje se dobije tako da prvo djeluje jedan od operatora, potom da na rezultat djeluje drugi). Također zanima nas postoji li za zadano linearno preslikavanje njemu inverzno preslikavanje i, ako postoji, kako se može zapisati. Ti se problemi rješavaju pojmovima zbroja i umnoška matrica i svojstvima tih operacija.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo, koje se oslanja na gradivo iz prethodne lekcije; za razumjevanje treba ponoviti svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Algebra matrica

Treba uočiti sljedeće činjenice:
zbrajanje matrica potpuno je analogno zbrajanju brojeva i svodi se nanj, jer se provodi zbrajanjem odgovarajućih elemenata; treba samo imati na umu da se zbrajaju (i oduzimaju) matrice istog reda, da je analogon broja 0 nul-matrica (isto oznaka 0), a analogon suprotnog broja **suprotna matrica** - matrica koja se dobije iz početne tako da se svakom elementu promijeni predznak.
Na primjer, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, onda je **suprotna matrica**
$-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Dakle, imamo ova očita svojstva zbrajanja matrica:

1. (**komutativnost**) $A + B = B + A$
2. (**asocijativnost**) (A+B)+C=A+(B+C)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$.

Množenje matrica nije analogno množenju brojeva, niti se tako jednostavno provodi. Ipak, iako je kompliciranije, ono je prirodno i do njega se analogno dolazi kao do zbrajanja: kako zbrajanje odgovara zbrajanju pripadnih linearnih operatora, tako umnožak matrica odgovara njihovoj **kompoziciji (uzastopnom djelovanju)**.
Vec smo vidjeli kako se matrica množi s jednostupčanom matricom; ponavljajući taj postupak sa svakim stupcem druge matrice, dobijemo produkt matrica.

Primjer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

odakle vidimo da je, općenito

$$AB \neq BA$$

(množenje matrica, za razliku od množenja brojeva, nije komutativno). To znači da kompozicija linearnih operatora nije komutativna.

Neutralni element za množenje Ono što je broj 1 za množenje brojeva, to je jedinična matrica I za množenje kvadratnih matrica. To znači da je

$$AI = IA = A$$

za svaku kvadratnu matricu A (istog reda kao i I). Provjerite!

Množenje matrice brojem Matricu množimo brojem tako da joj svaki element pomnožimo tim brojem. Na primjer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ onda je } 2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Uočite da brojem možemo množiti bilo koju matricu, ne samo kvadratnu. Uočite također da se skalarna matrica dobije množenjem jedinične matrice nekim brojem. Na primjer,

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Skalarne se matrice ponašaju kao i obični brojevi (na primjer, one komutiraju sa svakom matricom).

Inverzni element za množenje matrica - inverzna matrica. Svaki realni broj a različit od nule ima inverzni element s obzirom na množenje - to je recipročni element a^{-1}, tj. $\frac{1}{a}$, koji je jednoznačno određen uvjetom $a \cdot a^{-1} = 1$, također i uvjetom $a^{-1} \cdot a = 1$.
Analogno tome, inverzna matrica matrice A je matrica A^{-1} tako da bude $AA^{-1} = I$ (odnosno $A^{-1}A = I$). Uočite očite činjenice:

1. I je sama sebi inverzna jer je $I \cdot I = I$ (slično kako je $1 \cdot 1 = 1$)
2. Nul- matrica 0 nema inverzne matrice jer je $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ za svaku matricu A (istog reda), slično kako je $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, za sve realne brojeve a.

Postavlja se pitanje koje matrice imaju inverznu i kako se inverzne matrice određuju.

Primjer 2.. Odredimo inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ako postoji).
Treba naći matricu B drugog reda tako da bude $AB = I$ (mogli bismo gledati i $BA = I$). Stavimo $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$. Treba odrediti brojeve x, y, u, v.
Iz uvjeta $AB = I$, tj. $\begin{bmatrix} 2 & \text{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dobijemo
$2x - u = 1,\ 2y - v = 0,\ x = 0,\ y = 1$, tj. $x = 0, y = 1, u = -1, v = 2$, tj.

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \text{-1} & 2 \end{bmatrix}$$

Lako je vidjeti da je B zaista inverzna matrica od A i, također, da bismo isti rezultat dobili da smo razmatrali uvjet $BA = I$.

Formula za inverznu matricu matrice drugog reda. Slično kako smo postupili u prethodnom primjeru, mogli bismo postupiti za svaku kvadratnu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ drugog reda. Dobili bismo

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Odavde uočavamo **pravilo za određivanje inverza matrice drugog reda**:
1. Zamijenimo elemente na glavnoj dijagonali.
2. Elementima na sporednoj dijagonali promijenimo predznake.
3. Sve podijelimo s $ad - bc$.

Uvjet za postojanje inverza: $ad - bc \neq 0$ (s nulom se ne dijeli).
Dakle, matrice za koje je $ad - bc = 0$ nemaju inverz; taj se uvjet može zapisati kao $ad = bc$, odnosno kao $a : c = b : d$ što znači da su redci matrice proporcionalni (ujedno i stupci).

Determinanta matrice drugog reda. Vidjeli smo važnost izraza $ad - bc$ za matricu drugog reda $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Taj se izraz zove **determi-**

nanta matrice A i označava kao $\det A$, katkad i kao $|A|$, odnosno $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Vidimo da je $\det A \neq 0$ uvjet o postojanju inverza matrice drugog reda (to vrijedi **za sve**, a **ne samo za matrice drugog reda**).

Determinanta matrice trećeg reda - može se izračunati pomoću determinante matrice drugog reda **razvojem po nekom redku ili stupcu**. Na primjer, razvojem po prvom redku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Na primjer

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2(0-8) + (-1-12) + 3(2-0) = -23$$

Slično bismo dobili nekim drugim razvojem, na primjer po drugom stupcu (koristimo se pravilom da je na presjeku i-tog redka i j-tog stupca, tj. na mjestu elementa a_{ij}, predznak $(-1)^{i+j}$ i da izbacujemo elemente tog redka i tog stupca):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-13 + 0 - 10 = -23$$

Vidimo da je ovaj postupak lakši jer moramo računati samo dvije determinante 2-gog reda. Naime, jedna se od njih množi nulom, zato, općenito treba raditi s onim stupcem, odnosno redkom, u kojemu ima najviše nula.

Determinanta matrice bilo kojeg reda - definira se tako da se razvija po nekom redku ili stupcu pa se tako svodi na determinante nižeg reda. To pokazujemo na primjeru determinante četvrtog reda (uz napomenu da je za redove veće od 3 determinantu bolje računati jednom drugom metodom koju ćemo obrađivati u šestoj lekciji).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tu smo prvo determinantu četvrtog reda razvili po 1-om redku i tako sveli na dvije determinante 3-eg reda (jer su samo dva elementa tog redka različita od nule); potom smo prvu od determinanta 3-eg reda razvili po 3-em stupcu, a drugu po 2-om retku (a mogli smo i po 3-em stupcu) i dobili rezultat.

Inverz matrice trećeg reda

Pravilo objašnjavamo na primjeru matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. korak (računanje determinante): $\det A = -23$ (znamo od prije).
2. korak (određivanje transponirane matrice od A)

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. korak (određivanje **adjungirane matrice** $A^\star$ matrice A) - tako da u transponiranoj matrici svaki pojedini element zamijenimo determinantom drugog reda koju dobijemo brisanjem redka i stupca tog elementa, pomnoženom s ± 1 prema već rečenom pravilu.

$$A^\star = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -4 \\ 13 & -11 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tu smo element -8 dobili kao $+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, element 5 kao $-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ itd.

4. korak: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star$. U ovom je primjeru $A^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{bmatrix} -8 & 5 & -4 \\ 13 & -11 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$.

Zaista, lako se provjeri izravnim množenjem da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Inverz matrice bilo kojeg reda.

Pokazuje se da je $\det A \neq 0$ uvjet za postojanje inverza matrice A (bilo kojeg reda) i da vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star$$

gdje se adjungirana matrica $A^\star$ od A definira analogno kao za matrice 3-eg reda. U 6-om ćemo poglavlju opisati jednu bržu metodu za određivanje inverza matrice.

Očita svojstva množenja matrica. (ima ih malo)

1. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$
2. $AI = IA = A$
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Neočita svojstva množenja matrica

4. (**asocijativnost**) $(AB)C = A(BC)$
5. (**distributivnost**) $A(B + C) = AB + AC$

Također:

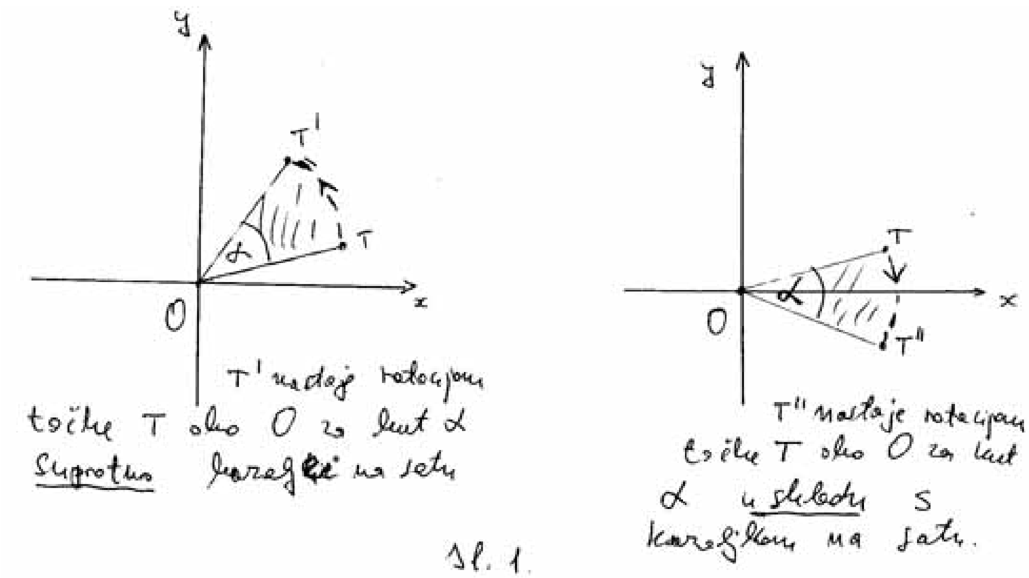
6. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7. $(AB)^t = B^t A^t$
8. $(AB)^\star = B^\star A^\star$
9. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

V. Pitanja i zadaci

Zadatak 1. Odredite inverze matrica povezanih s važnim transformacijama prostora ili ravnine:
(i) geometrijski, tj. koristeći se činjenicom da inverzna matrica odgovara inverznoj transformaciji.
(ii) analitički, tj. koristeći se formulom $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\star}$.

1. **Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α suprotno kazaljci na satu**.

Geometrijski pristup: Inverz rotacije za kut α suprotno kazaljci na satu, jest rotacija za kut α u skladu s kazaljkom na satu, a to je upravo rotacija za kut $-\alpha$ suprotno kazaljci na satu (sl.1).



Sl. 1.

Dakle, ako je
$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, onda je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Uočite da smo mogli razmišljati i ovako: inverz rotacije za kut α je rotacija za kut $360° - \alpha$ (sve suprotno od kazaljke na satu).
Analitički pristup. Formulom za inverz matrice drugog reda dobije se isti rezultat. Naime, tu je, $\det A = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha) \cdot \sin\alpha = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

Centralna simetrija prostora s obzirom na ishodište
Geometrijski pristup. Očito je da je centralna simetrija sama sebi inverzna, pa je tu $A^{-1} = A$. To se lako provjeri i analitički jer je tu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Simetrija ravnine s obzirom na koordinatne osi i os $y = x$
Tu je, kao i prije $A^{-1} = A$.

Simetrija prostora s obzirom na xy ravninu
Opet $A^{-1} = A$. Svaka je simetrija sama sebi inverzna.

Projekcija prostora na xy ravninu
Geometrijski pristup. Ako znademo projekciju neke točke na ravninu, tada ne možemo sa sigurnošću rekonstruirati tu točku (jer beskonačno mnogo točaka - čitav pravac - ima istu projekciju). To znači da projekcija nema inverznu transformaciju. Zato matrica nema inverz.
Analitički pristup. Tu je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa je očito $\det A = 0$ (razvoj po trećem redku ili stupcu), pa A^{-1} ne postoji.

Rotacija u prostoru oko z-osi za kut α Tu je
$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
pa, kao i za rotaciju u ravnini, geometrijskim argumentom dobijemo
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
što se lako provjeri i analitički.